

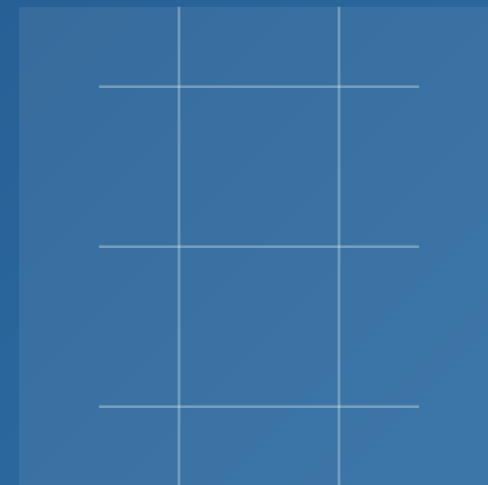
张量分析与连续介质力学 · 第四章

张量场的微分运算

梯度 · 散度 · 旋度 · 拉普拉斯 · 速度梯度分解

徐翱 景泽 编著

面向连续介质力学与工程应用 · 陕西省普通本科高校精品教学资源



知识目标

- 理解微分算子与普通矢量的区别
- 掌握标量场、矢量场、二阶张量场的梯度与散度定义
- 掌握三维矢量场旋度的指标表达
- 理解速度梯度的对称—反对称分解与Q准则

能力目标

- 按统一约定 $L_{ij} = \partial_j v_i$ 展开微分关系
- 按 $(\text{div } T)_i = \partial_j T_{ij}$ 检验局部平衡
- 区分应变率、自旋和涡量
- 用 Python/SymPy 对复杂场导数进行符号验证

高阶挑战目标

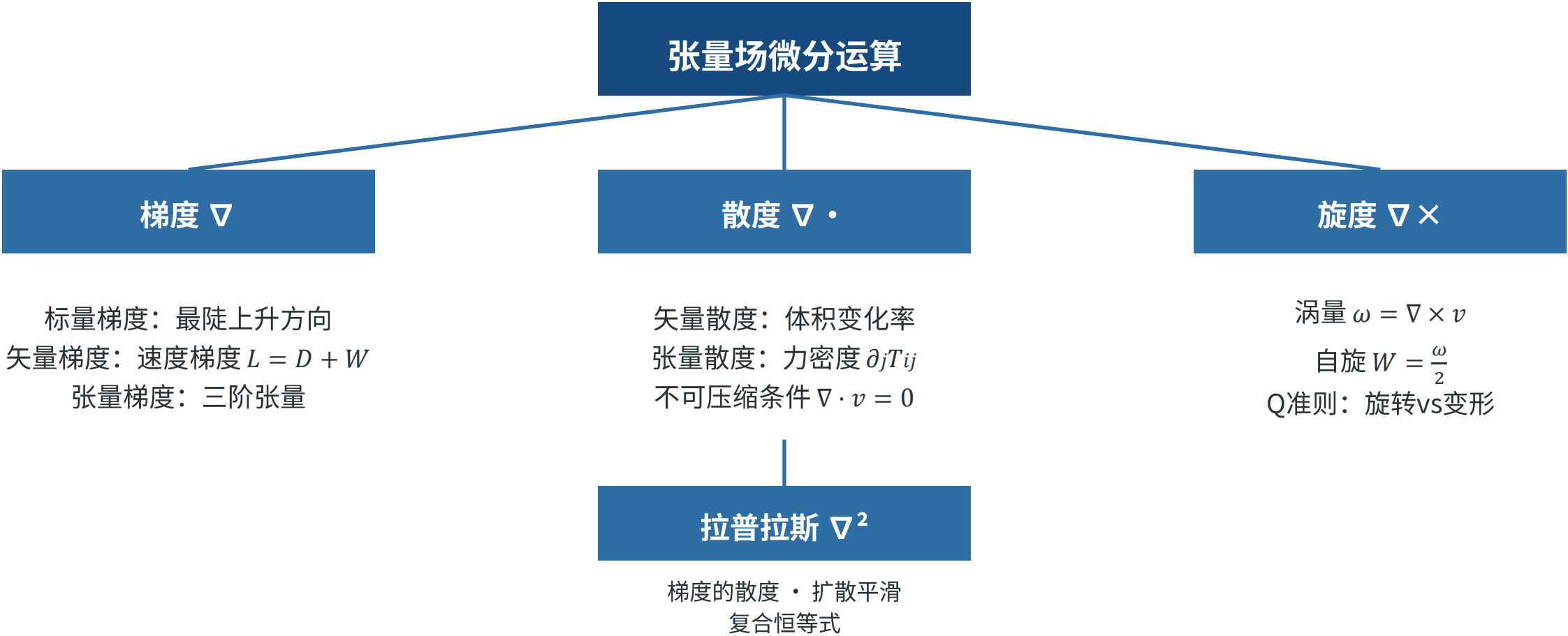
- 利用指标记法推导复合矢量恒等式
- 比较局部变形耗散与旋转—变形竞争（Q准则与黏性耗散的区别）

教学重点

- 梯度、散度、旋度的定义与指标表达
- 速度梯度 $L = D + W$ 的对称—反对称分解
- 物质导数的局部项与平流项分解
- 二阶张量散度约定 $(div T)_i = \partial_j T_{ij}$
- 涡量、自旋张量与局部角速度的关系
- 三个基本复合微分恒等式

教学难点

- 微分算子与普通矢量的本质区别
- 矢量梯度的指标顺序 $(\nabla v)_{ij} = \partial_j v_i$
- 不可压缩 $\neq$ 恒密度：运动学约束与质量守恒的关系
- 非零涡量 $\neq$ 存在涡核：简单剪切的反例
- Q准则与黏性耗散回答的不同问题
- 稳态流动仍可有非零物质加速度



核心主线：物理图像 → 数学表达 → 工程应用 → 计算实践 | 物质导数 $\frac{D}{Dt} = \frac{\partial}{\partial t} + v \cdot \nabla$ 贯穿全章

为什么仅知道某点的物理量 不足以描述连续介质的行为？

- 流体中相邻两点的速度差如何产生变形和旋转？
- 应力分布不均匀时，单位体积受到多大净力？
- 温度梯度如何驱动热流？各向异性介质中方向为何改变？

本章要建立的工具

- 梯度：提取局部空间变化率
- 散度：判断局部膨胀或压缩
- 旋度：识别局部自旋
- 拉普拉斯：描述扩散与平滑

连续介质力学中，物理量通常依赖于空间位置与时间：

$$\rho = \rho(x,t) \quad T = T(x,t) \quad v = v(x,t) \quad \sigma = \sigma(x,t)$$

方向导数的定义

标量场 $\phi = \phi(x_1, x_2, x_3, t)$

沿单位方向 $s = s_i e_i$, $s_i s_i = 1$

方向导数由链式法则给出：

$$\partial \phi / \partial s = s_i \partial_i \phi$$

其中 $\partial_i \equiv \partial / \partial x_i$

课堂思考

已知山顶温度比山脚低，沿不同方向攀登时：

- 哪个方向温度下降最快？
- 沿等高线行走时温度变化率是多少？
- 方向导数的最大值由什么决定？

物质导数：局部变化与平流变化

方向导数描述"沿给定空间方向移动时场量如何变化"。若移动方向和速率由速度场决定，则得到物质导数：

$$D\phi/Dt = \partial_t \phi + v_i \partial_i \phi = \partial \phi / \partial t + \mathbf{v} \cdot \nabla \phi$$

局部变化率 $\partial \phi / \partial t$

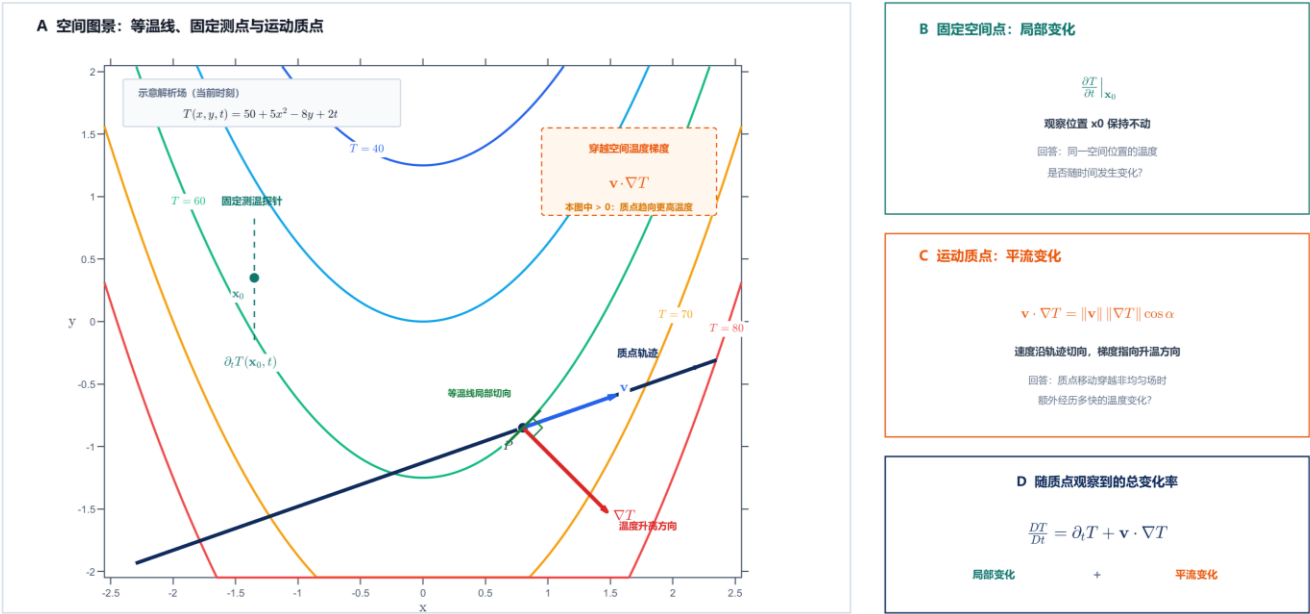
- 固定空间点处的时间变化率
- 欧拉描述下的观察者测得
- 稳态流动时 $\partial \phi / \partial t = 0$
- 对应"站在原地看"的视角

平流变化率 $\mathbf{v} \cdot \nabla \phi$

- 运动质点穿越非均匀场产生
- 拉格朗日描述下的附加变化
- 即使稳态也可能不为零
- 对应"跟着质点走"的视角

温度场中的局部时间变化、平流变化与物质导数

固定空间点观察场本身随时间的变化；运动质点还会因穿越非均匀温度场而经历平流变化



读图要点

- 等温线：温度相等的曲线
- ∇T ：垂直等温线，指向温度升高方向
- $\mathbf{v}$ ：质点运动速度方向
- $\mathbf{v} \cdot \nabla T$ ：速度在梯度方向的投影
- 质点从低温区移向高温区时， $DT/Dt > 0$
- 沿等温线运动时， $\mathbf{v} \cdot \nabla T = 0$

关键：稳态温度场中运动质点仍可感受温度变化

工程例题：流体质点的温度变化率

题目：二维稳态温度场 $T(x,y) = 20 + 5x + 3y$ (°C)，流体质点速度 $\mathbf{v} = (2, -1)$ m/s。

求：质点在原点处的物质导数 DT/Dt ，并解释物理意义。

解题步骤

Step 1: 温度梯度

$$\partial T / \partial x = 5, \quad \partial T / \partial y = 3$$

Step 2: 物质导数公式

$$DT/Dt = \partial T / \partial t + v_x \partial T / \partial x + v_y \partial T / \partial y$$

Step 3: 代入计算

$$DT/Dt = 0 + 2 \times 5 + (-1) \times 3 = 7 \text{ °C/s}$$

物理意义解读

- 温度场稳态： $\partial T / \partial t = 0$
- x方向速度2 m/s，温度梯度5 °C/m → 升温10 °C/s
- y方向速度-1 m/s，温度梯度3 °C/m → 降温3 °C/s
- 净效果：质点每秒升温7 °C
- 工程意义：换热器中冷流体被加热的速率

将方向导数中的单位方向 s 抽象出来，得到空间微分算子 ∇ （读作 Nabla 或 Del）：

$$\nabla = e_i \partial_i = e_1 \partial / \partial x_1 + e_2 \partial / \partial x_2 + e_3 \partial / \partial x_3$$

∇ 作用于不同阶张量

标量场 ϕ : $\nabla \phi = e_i \partial_i \phi \rightarrow$ 矢量

矢量场 v : $\nabla v \rightarrow$ 二阶张量

$$(\nabla v)_{ij} = \partial_j v_i$$

二阶张量 T : $\nabla T \rightarrow$ 三阶张量

$$(\nabla T)_{ijk} = \partial_k T_{ij}$$

易错提醒

- ∇ 是算子，不是普通矢量
- $\nabla \phi$ 中 ∇ 在 ϕ 左侧，结果是矢量
- $\phi \nabla$ 无意义（算子右侧无作用对象）
- 指标顺序: $(\nabla v)_{ij} = \partial_j v_i$ ，不是 $\partial_i v_j$

概念辨析：微分算子不是普通矢量

∇ 在形式上像矢量，但它必须作用于右侧的场量才有意义，因此不满足普通矢量的所有代数性质：

性质	普通矢量 $\mathbf{a}$	微分算子 ∇
交换律	$\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = \mathbf{b} \cdot \mathbf{a}$	$\nabla \cdot \mathbf{v} \neq \mathbf{v} \cdot \nabla$ (前者标量，后者算子)
点积结果	$\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = \text{标量}$	$\nabla \cdot \mathbf{v} = \text{标量 (散度)}$
单独存在	$\mathbf{a}$ 本身有物理意义	∇ 单独无意义，必须作用于场量
顺序敏感	$\mathbf{a} \times \mathbf{b} = -\mathbf{b} \times \mathbf{a}$	$\nabla \times \mathbf{v}$ 与 $\mathbf{v} \times \nabla$ 完全不同
乘积法则	$\mathbf{a} \cdot (\mathbf{b}\mathbf{c}) = (\mathbf{a} \cdot \mathbf{b})\mathbf{c}$	$\nabla \cdot (\phi \mathbf{v}) = (\nabla \phi) \cdot \mathbf{v} + \phi \nabla \cdot \mathbf{v}$

核心结论： ∇ 是"矢量模样的微分算子"，使用时必须牢记它右侧的场量才是被微分的对象

表达式	指标形式	结果阶数	名称
$\nabla \phi$	$e_i \partial_i \phi$	矢量 (1阶)	标量梯度
∇v	$e_i e_j \partial_j v_i$	二阶张量	矢量梯度
$\nabla \cdot v$	$\partial_i v_i$	标量 (0阶)	散度
$\nabla \times v$	$\epsilon_{ijk} \partial_j v_k$	矢量 (1阶)	旋度
$\nabla \cdot T$	$e_i \partial_j T_{ij}$	矢量 (1阶)	张量散度
$\nabla^2 \phi$	$\partial_i \partial_i \phi$	标量 (0阶)	拉普拉斯
$v \cdot \nabla$	$v_i \partial_i$	算子 (非张量)	平流算子
$(v \cdot \nabla)v$	$v_j \partial_j v_i$	矢量 (1阶)	对流加速度

数字赋能 04-A：标量场梯度的符号计算

用 SymPy 对复杂标量场自动求梯度，验证手算结果，避免指标错误：

```
Import sympy as sp
x, y, z = sp.symbols('x y z')
# 定义标量场：温度分布
T = 20 + 5*x + 3*y + x**2*z
# 计算梯度 ∇T
grad_T = [sp.diff(T, var)
For var in[x, y, z]]
print("∇T =", grad_T)
# 输出: [5 + 2*x*z, 3, x**2]
# 在点 (1,2,3) 处求值
point = {x:1, y:2, z:3}
grad_at_p = [g.subs(point) for g in grad_T]
print("∇T(1,2,3) =", grad_at_p)
# 输出: [11, 3, 1]
```

计算结果解读

- $\nabla T = (5+2xz, 3, x^2)$
- 在 (1,2,3) 处: $\nabla T = (11, 3, 1)$
- 梯度方向指向温度升高最快的方向
- 梯度模长 = $\sqrt{(11^2+3^2+1^2)} = \sqrt{131} \approx 11.4$
- 最大方向导数 = 11.4°C/m

教学价值：

符号计算消除手算误差，让学生聚焦物理意义而非代数运算

4.2

梯度 ∇

- 从标量场提取最陡上升方向
- 从速度场提取局部变形与旋转
- 标量梯度 $\rightarrow$ 热流、扩散驱动力
- 矢量梯度 $\rightarrow$ 速度梯度 $L = D + W$

$$\nabla \phi = e_i \partial_i \phi \quad \text{分量: } (\nabla \phi)_i = \partial \phi / \partial x_i$$

几何性质

- $\nabla \phi$ 垂直于 ϕ 的等值面（等高线）
- 指向 ϕ 增大最快的方向
- $|\nabla \phi|$ = 最大方向导数
- 沿等值面切线方向： $s \cdot \nabla \phi = 0$
- $\nabla \phi = 0$ 处为极值点或鞍点

物理意义

- 温度梯度 $\nabla T \rightarrow$ 热流驱动力
- $q = -k \nabla T$ （傅里叶定律）
- 压力梯度 $\nabla p \rightarrow$ 流体加速力
- $-\nabla p$ 为压力体元力
- 浓度梯度 $\nabla c \rightarrow$ 扩散驱动力
- 势能梯度 $\nabla U \rightarrow$ 保守力 $F = -\nabla U$

温度梯度、等温线与各向同性/各向异性导热

温度梯度始终指向升温最快方向；材料导热张量决定热流是否与负梯度共线

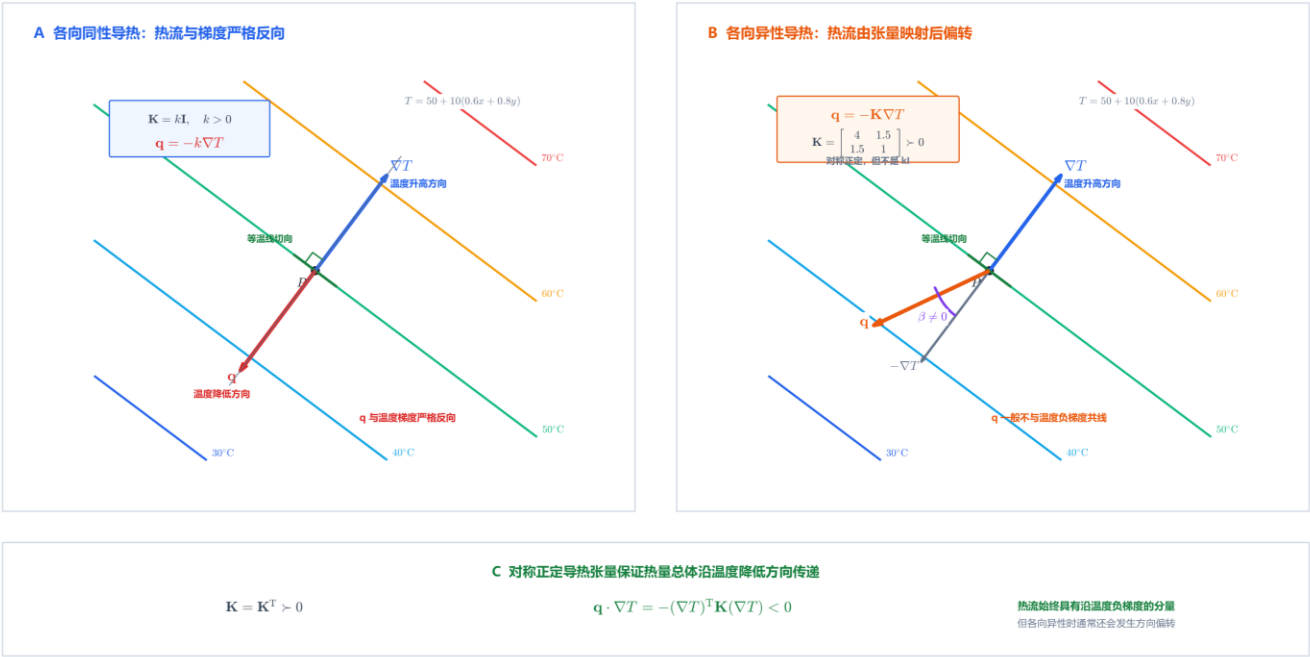


图4-2 各向同性与各向异性导热中温度梯度和热流方向对比

读图要点

- 各向同性： $\mathbf{q}$ 与 ∇T 反向共线
- 各向异性： $\mathbf{q}$ 与 ∇T 不共线
- 热流张量 $\mathbf{q} = -\mathbf{K} \cdot \nabla T$
- $\mathbf{K}$ 为二阶热导率张量

课堂提问

为什么各向异性材料中热流方向与温度梯度方向不一致？这对复合材料热设计有什么启示？

保守力场可以表示为标量势能的负梯度，这是梯度最重要的物理应用之一：

$$\mathbf{F} = -\nabla U \Leftrightarrow \nabla \times \mathbf{F} = 0$$

保守力的等价条件

- 存在势能 U ，使 $\mathbf{F} = -\nabla U$
- 旋度为零： $\nabla \times \mathbf{F} = 0$
- 沿闭合回路做功为零
- 做功与路径无关
- 重力、弹性力、静电力均为保守力

易错点

- $\mathbf{F} = -\nabla U$ ，负号不可遗漏
- 力指向势能减小最快的方向
- 摩擦力是非保守力，不能写为梯度
- $\nabla \times \mathbf{F} = 0$ 是局部条件，全局保守还需单连通域

等势线、势梯度与保守力的路径无关性

解析示例：中心势 $\Phi(x,y) = \frac{1}{2}k(x^2+y^2)$, $k > 0$

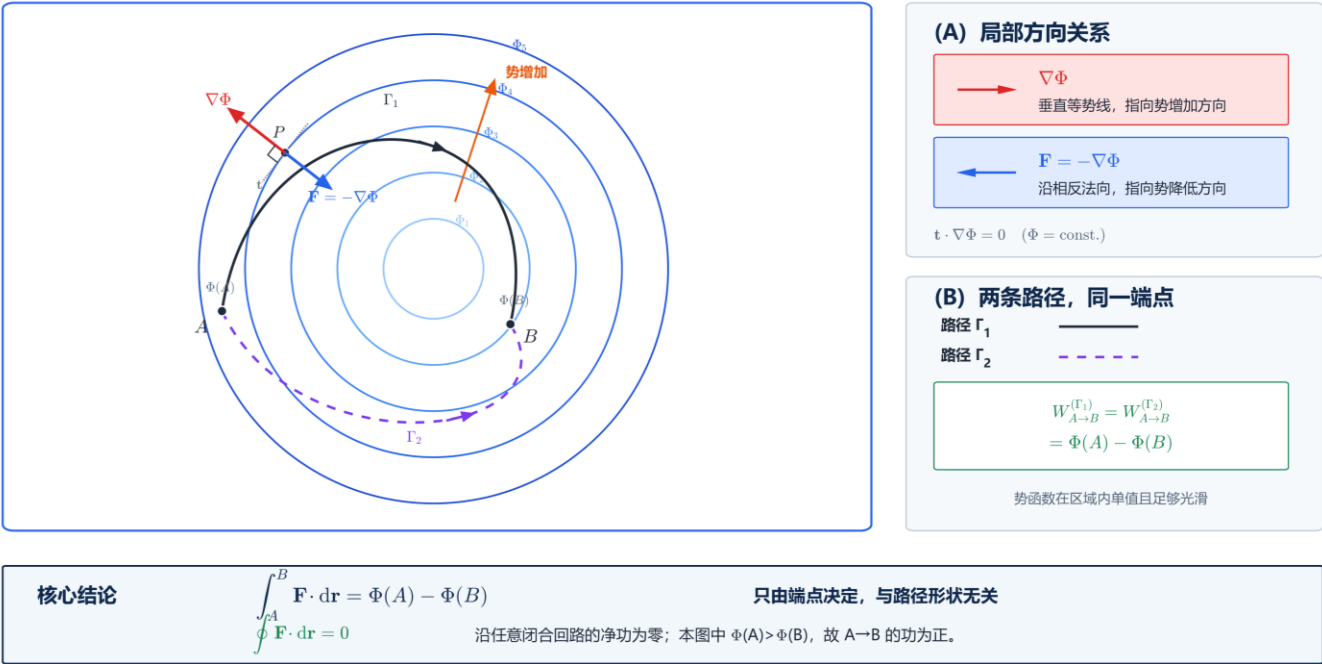


图4-3 保守力场中的等势线、势梯度与力方向

读图要点

- 等势线：势能相等的曲线
- ∇U 垂直于等势线
- $\mathbf{F} = -\nabla U$ 指向势能降低方向
- 等势线越密, $|\nabla U|$ 越大, 力越强

课堂提问

图中A、B两点，哪点势能更高？哪点受力更大？力的方向如何？

对标量场求梯度得到矢量，对矢量场求梯度得到二阶张量——速度梯度是流体力学的核心：

$$L = \nabla \mathbf{v} \text{ 分量: } L_{ij} = \partial v_i / \partial x_j = \partial_j v_i$$

指标约定（教材）

- 第一指标 i ：速度分量方向
- 第二指标 j ：求导方向
- $L_{ij} = \partial_j v_i$ （先写行后写列）
- 注意：部分教材用 $\partial_i v_j$ ，需统一

物理意义

- 描述流场中速度的空间变化率
- 局部速度增量： $d\mathbf{v} = L \cdot d\mathbf{x}$
- 包含变形和旋转两部分
- 是牛顿流体本构方程的核心输入
- 黏性应力 $\tau = 2\mu D$ ， D 来自 L 的对称部分

速度梯度分解： $L = D + W$

4.2 梯度

$$L = D + W \quad D = (L + L^T)/2 \quad W = (L - L^T)/2$$

变形率张量 D (对称)

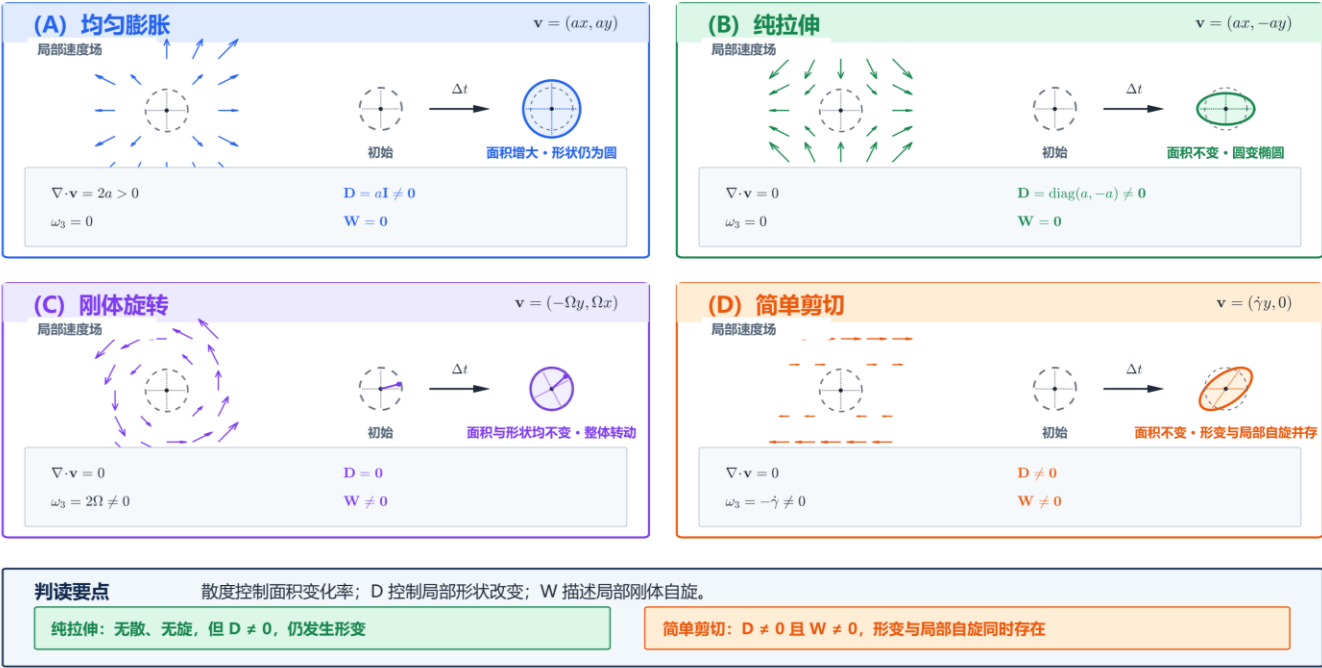
- $D_{ij} = (\partial_j v_i + \partial_i v_j)/2$
- 描述流体微元的变形 (拉伸+剪切)
- $\text{tr}(D) = \nabla \cdot \mathbf{v}$ = 体积变化率
- 不可压缩： $\text{tr}(D) = 0$
- 牛顿流体黏性应力 $\tau = 2\mu D$
- 主方向：纯拉伸方向

涡量张量 W (反对称)

- $W_{ij} = (\partial_j v_i - \partial_i v_j)/2$
- 描述流体微元的刚体旋转
- $W_{ij} = -W_{ji}$ ，对角线为零
- 与涡量 $\omega = \nabla \times \mathbf{v}$ 对应
- $W_{ij} = -\varepsilon_{ijk} \omega_k / 2$
- 刚体旋转： $L = W$ ($D=0$)

四类典型线性流动的局部运动学

速度场决定短时流映射；虚线为初始小圆，实线填色为变形后的物质微元



流动类型与 L 分解

- 均匀膨胀： $\mathbf{D} \neq 0, \mathbf{W} = 0, \text{tr}(\mathbf{D}) \neq 0$
- 纯拉伸： $\mathbf{D} \neq 0, \mathbf{W} = 0, \text{tr}(\mathbf{D}) = 0$
- 刚体旋转： $\mathbf{D} = 0, \mathbf{W} \neq 0$
- 简单剪切： $\mathbf{D} \neq 0, \mathbf{W} \neq 0$

关键观察：

剪切流同时包含变形和旋转，D和W都不为零

图4-4 四类二维线性流动：均匀膨胀、纯拉伸、刚体旋转、简单剪切

工程例题：简单剪切流的速度梯度

4.2 梯度

题目：二维简单剪切流 $\mathbf{v} = (\gamma y, 0)$ ， γ 为剪切率。求速度梯度 $\mathbf{L}$ 、变形率 $\mathbf{D}$ 和涡量张量 $\mathbf{W}$ 。

求解步骤

Step 1 $L_{ij} = \partial_j v_i$

$$\mathbf{L} = \begin{bmatrix} 0 & \gamma \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Step 2 $\mathbf{D} = (\mathbf{L} + \mathbf{L}^T)/2$

$$\mathbf{D} = \begin{bmatrix} 0 & \gamma/2 \\ \gamma/2 & 0 \end{bmatrix}$$

Step 3 $\mathbf{W} = (\mathbf{L} - \mathbf{L}^T)/2$

$$\mathbf{W} = \begin{bmatrix} 0 & \gamma/2 \\ -\gamma/2 & 0 \end{bmatrix}$$

物理结论

- $\text{tr}(\mathbf{D}) = 0 \rightarrow$ 不可压缩
- 剪切流同时有变形和旋转
- 涡量 $\boldsymbol{\omega} = \nabla \times \mathbf{v} = (0, 0, -\gamma)$
- 黏性应力 $\boldsymbol{\tau} = 2\mu\mathbf{D} = \begin{bmatrix} 0 & \mu\gamma \\ \mu\gamma & 0 \end{bmatrix}$
- 库埃特流、泊肃叶流均含剪切分量

数字赋能 04-B：速度梯度与变形率计算

4.2 梯度

用 NumPy 自动计算速度梯度、变形率和涡量张量，验证手算结果：

```
import numpy as np
# 简单剪切流 v=(γy, 0)
gamma = 2.0
# 速度梯度 Lij = ∂j vi
L = np.array([[0, gamma], [0, 0]])
# 变形率 D = (L+LT)/2
D = (L + L.T) / 2
# 涡量张量 W = (L-LT)/2
W = (L - L.T) / 2
print("tr(D) =", np.trace(D))
# 输出: tr(D) = 0.0
# 涡量 ωz = -2*W12
omega_z = -2 * W[0,1]
print("ωz =", omega_z)
# 输出: ωz = -2.0
```

计算结果解读

- $D = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$
- $W = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$
- $\text{tr}(D) = 0 \rightarrow$ 不可压缩
- $\omega_z = -\gamma = -2.0$
- 黏性应力 $\tau = 2\mu D$

拓展：

修改速度场为刚体旋转 $v=(-\omega y, \omega x)$ ，验证 $D=0$

4.3

散度 $\nabla \cdot$

- 矢量场的"源"与"汇"
- 体积变化率的度量
- $\nabla \cdot \mathbf{v} = 0 \rightarrow$ 不可压缩
- 高斯定理: 体积分 $\leftrightarrow$ 面积分

$$\nabla \cdot \mathbf{v} = \partial_i v_i = \partial v_1 / \partial x_1 + \partial v_2 / \partial x_2 + \partial v_3 / \partial x_3$$

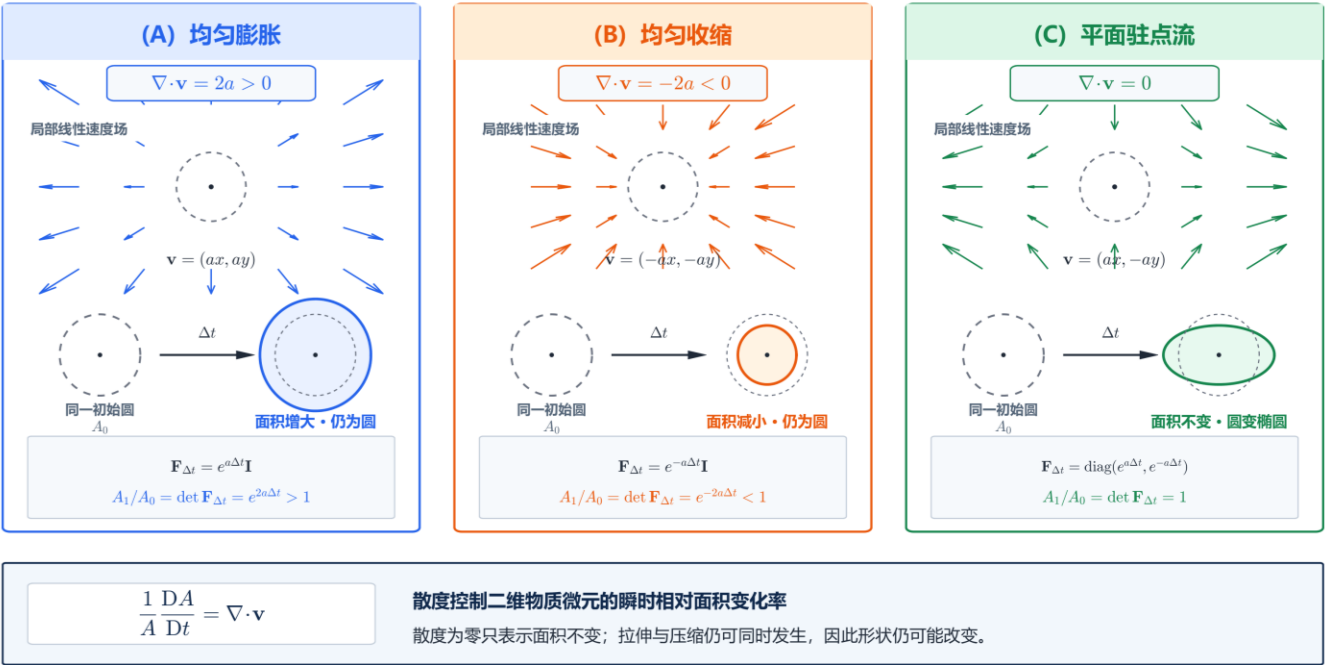
物理意义

- 单位体积的净流出通量
- $\nabla \cdot \mathbf{v} > 0$: 源 (膨胀/流出)
- $\nabla \cdot \mathbf{v} < 0$: 汇 (收缩/流入)
- $\nabla \cdot \mathbf{v} = 0$: 无源 (不可压缩)
- 流体中 $\nabla \cdot \mathbf{v}$ = 相对体积变化率
- $= (1/V) dV/dt = \text{tr}(\mathbf{D})$

工程应用

- 不可压缩流体: $\nabla \cdot \mathbf{v} = 0$
- 连续性方程: $\partial \rho / \partial t + \nabla \cdot (\rho \mathbf{v}) = 0$
- 静电场: $\nabla \cdot \mathbf{E} = \rho / \epsilon_0$ (高斯定律)
- 热传导: $\nabla \cdot \mathbf{q} = -\rho c \partial T / \partial t$
- 质量守恒、动量守恒的散度形式

散度与二维物质微元的短时变化
三种流动均从同一个初始小圆出发；虚线为 t ，实线填色为 $t + \Delta t$



读图要点

- 膨胀： $\nabla \cdot \mathbf{v} > 0$ ，面积增大
- 收缩： $\nabla \cdot \mathbf{v} < 0$ ，面积减小
- 等面积椭圆： $\nabla \cdot \mathbf{v} = 0$
- 纯变形不改变面积（不可压缩）

课堂提问

等面积椭圆变形中，微元形状改变但面积不变，此时散度是多少？变形率张量D有什么特点？

$$\int_V \nabla \cdot \mathbf{v} dV = \oint_S \mathbf{v} \cdot \mathbf{n} dS$$

定理含义

- 体积内散度的总和 = 边界净通量
- 内部源汇的总效果由边界流出体现
- 将体积分转化为面积分（或反之）
- 是守恒律的数学基础
- $\mathbf{n}$ 为外法向单位矢量

连续介质力学中的应用

- 质量守恒: $\partial \rho / \partial t + \nabla \cdot (\rho \mathbf{v}) = 0$
- 动量守恒: $\rho d\mathbf{v}/dt = \nabla \cdot \boldsymbol{\sigma} + \rho \mathbf{f}$
- 能量守恒的积分形式
- 虚功原理与变分法
- 有限元法中弱形式的推导

对二阶张量求散度得到矢量，是动量守恒方程的核心：

$$(\nabla \cdot \mathbf{T})_i = \partial_j T_{ij}$$

教材约定：对第二指标求导

指标约定（教材）

- 对第二指标 j 求和求导
- 结果保留第一指标 i
- $\partial_j T_{ij} = \partial T_{i1}/\partial x_1 + \partial T_{i2}/\partial x_2 + \partial T_{i3}/\partial x_3$
- 注意：部分教材用 $\partial_i T_{ij}$

物理意义

- 应力张量散度 $\nabla \cdot \sigma =$ 单位体积面力合力
- 动量方程： $\rho a = \nabla \cdot \sigma + \rho f$
- 柯西应力张量的平衡方程
- $\nabla \cdot \sigma = 0 \rightarrow$ 静力学平衡
- 是固体力学和流体力学的核心

工程例题：不可压缩流动的散度条件

4.3 散度

题目：二维流动 $v = (ax, -ay)$ ， a 为常数。判断是否不可压缩，并求变形率 D 。

求解步骤

Step 1 $\nabla \cdot v = \partial v_x / \partial x + \partial v_y / \partial y$

$= a + (-a) = 0 \rightarrow$ 不可压缩

Step 2 $L = [[a, 0], [0, -a]]$

Step 3 $D = L$ (L 已对称)

$D = [[a, 0], [0, -a]]$

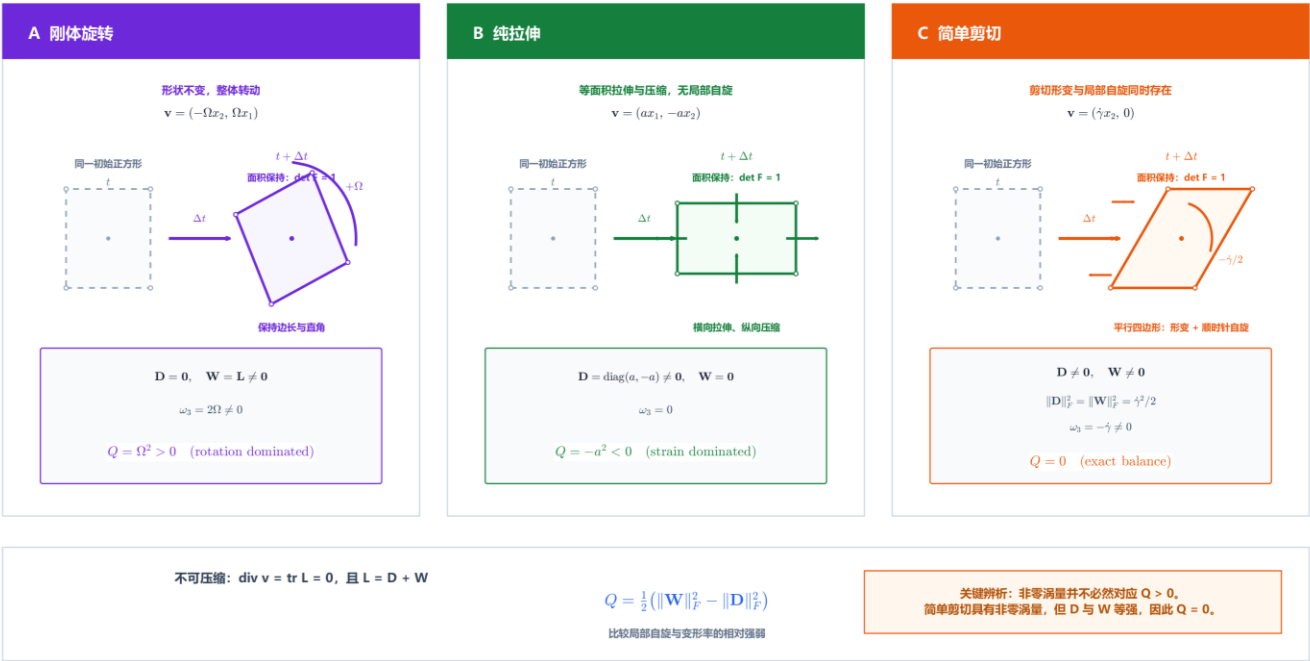
Step 4 $\text{tr}(D) = a + (-a) = 0$

物理结论

- 纯拉伸流动：x方向拉伸，y方向压缩
- 面积守恒（不可压缩）
- $W = 0$ （无旋转，无旋流动）
- 主方向沿x、y轴
- 对应教材图"纯拉伸"流动
- 常见于孔口出流、收缩流道

三类不可压缩局部线性流动：变形率、自旋与 Q 值

三个面板均从相同的正方形流体微元开始；三种映射均保持面积，差别来自 D 与 W 的竞争



共同特征与区别

- 共同: $\nabla \cdot \mathbf{v} = 0$ (不可压缩)
- 纯拉伸: $D \neq 0, W = 0$
- 刚体旋转: $D = 0, W \neq 0$
- 简单剪切: $D \neq 0, W \neq 0$

课堂提问

$Q = (|W|^2 - |D|^2)/2$ ，三类流动的Q值符号分别是什么？

用 SymPy 符号计算验证散度与体积变化率的关系：

```
Import sympy as sp
x, y, z = sp.symbols('x y z')
a = sp.symbols('a')
# 速度场 v=(ax, -ay, 0)
vx, vy, vz = a*x, -a*y, 0
# 散度  $\nabla \cdot v$ 
div_v = sp.diff(vx,x)+sp.diff(vy,y)+sp.diff(vz,z)
print(" $\nabla \cdot v$  =", div_v)
# 输出:  $\nabla \cdot v = 0$ 
# 变形率 D 的迹
L = sp.Matrix([[sp.diff(vx,x), sp.diff(vx,y)],
[sp.diff(vy,x), sp.diff(vy,y)]])
D = (L + L.T)/2
print("tr(D) =", D.trace())
# 输出: tr(D) = 0
```

计算结果解读

- $\nabla \cdot v = 0 \rightarrow$ 不可压缩
- $\text{tr}(D) = 0 \rightarrow$ 体积不变
- 验证: $\nabla \cdot v = \text{tr}(D)$
- 纯拉伸流动面积守恒

拓展：

修改为 $v=(ax, ay, -2az)$ ，验证三维不可压缩

比较维度	梯度 $\nabla \phi$	散度 $\nabla \cdot \mathbf{v}$
输入	标量场 ϕ	矢量场 $\mathbf{v}$
输出	矢量（方向+大小）	标量（源汇强度）
物理意义	变化最陡的方向和速率	单位体积净流出通量
指标形式	$(\nabla \phi)_i = \partial_i \phi$	$\nabla \cdot \mathbf{v} = \partial_i v_i$
典型应用	热流 $\mathbf{q} = -k \nabla T$	不可压缩 $\nabla \cdot \mathbf{v} = 0$

易错点：梯度作用于标量得矢量，散度作用于矢量得标量，不可混淆输入输出类型。

问题：下列速度场中，哪些是不可压缩的 ($\nabla \cdot \mathbf{v} = 0$) ？

请逐一判断：

A. $\mathbf{v} = (x, -y, 0) \rightarrow \nabla \cdot \mathbf{v} = ?$

B. $\mathbf{v} = (-y, x, 0) \rightarrow \nabla \cdot \mathbf{v} = ?$

C. $\mathbf{v} = (x, y, z) \rightarrow \nabla \cdot \mathbf{v} = ?$

D. $\mathbf{v} = (y, -x, 0) \rightarrow \nabla \cdot \mathbf{v} = ?$

4.4

旋度 $\nabla \times$

矢量场的"旋转"强度 • 涡量的度量

$\nabla \times \mathbf{v} = 0 \rightarrow$ 无旋 (有势) • 斯托克斯定理: 面积分 $\leftrightarrow$ 线积分

$$(\nabla \times \mathbf{v})_i = \varepsilon_{ijk} \partial_j v_k \omega = \nabla \times \mathbf{v} \text{ 称为涡量}$$

物理意义

- 度量矢量场的局部旋转强度
- 方向沿旋转轴（右手定则）
- 大小 = 2倍局部角速度
- $\nabla \times \mathbf{v} = 0$ ：无旋场（有势场）
- $\nabla \times \mathbf{v} \neq 0$ ：有旋场（含涡量）
- 流体中 $\omega = \nabla \times \mathbf{v}$ 是涡量

工程应用

- 涡量输运方程： $\partial \omega / \partial t = \nabla \times (\mathbf{v} \times \omega)$
- 无旋流动 $\rightarrow$ 速度势 ϕ 存在
- 边界层、尾迹中的涡量生成
- 电磁学： $\nabla \times \mathbf{E} = -\partial \mathbf{B} / \partial t$ （法拉第）
- $\nabla \times \mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{J}$ （安培定律）

稳态速度场仍可具有非零对流加速度

稳态只排除固定空间点处的局部时间变化，并不排除运动质点速度方向的空间变化

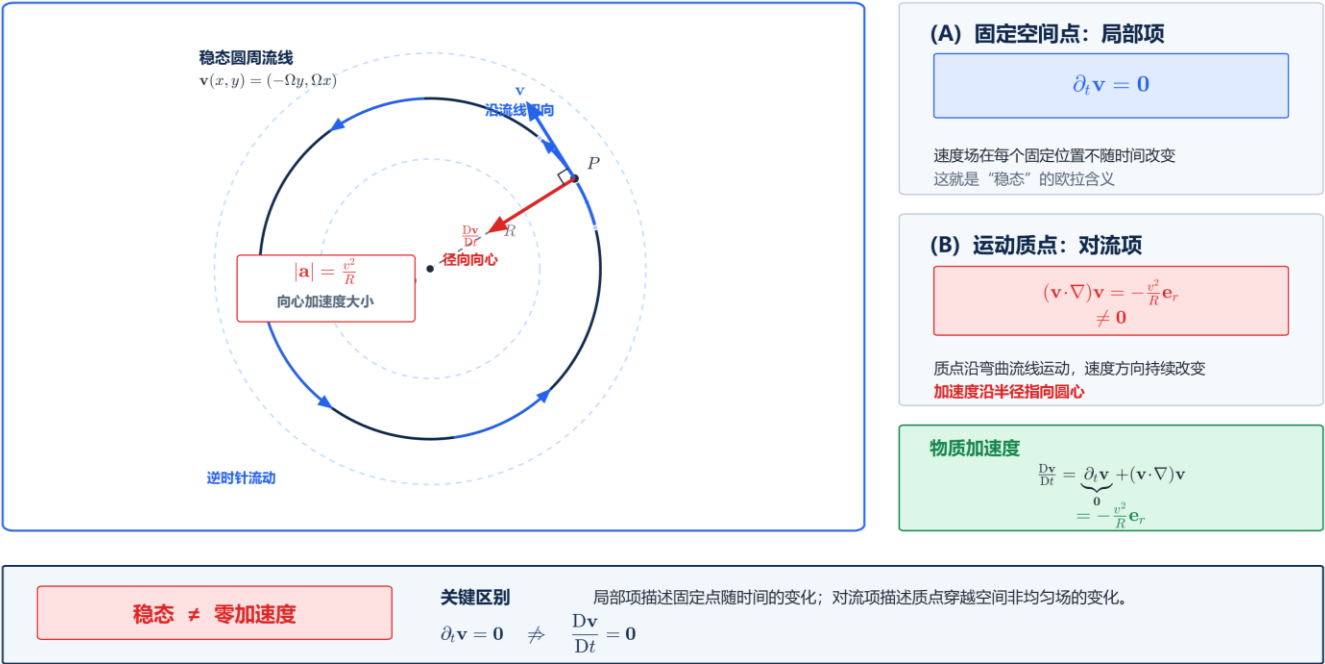


图4-7 稳态圆周流：速度矢量切向，物质加速度指向圆心

读图要点

- 速度 v 沿切向，大小与 r 成正比
- 稳态： $\partial v / \partial t = 0$
- 但 $a = (\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{v} \neq 0$
- 向心加速度 $= -v^2/r$

旋度计算

$\mathbf{v} = (-\omega y, \omega x, 0)$
 $\nabla \times \mathbf{v} = (0, 0, 2\omega)$
刚体旋转：旋度 = 2倍角速度

旋度与角速度、涡量张量的关系

速度梯度 $L = D + W$ ，其中反对称部分 W 与旋度直接关联：

$$W_{ij} = (\partial_j v_i - \partial_i v_j)/2 \quad \omega_i = \varepsilon_{ijk} W_{jk} = (\nabla \times \mathbf{v})_i$$

关键关系

- 旋度 $\omega = \nabla \times \mathbf{v} = 2\Omega$ （局部角速度矢量）
- 涡量张量 W 与 ω 一一对应
- $W = [[0, -\omega_3/2, \omega_2/2], \dots]$
- 刚体旋转： $D=0, L=W$
- 无旋流动： $W=0, \nabla \times \mathbf{v}=0$

物理图像

- 流体微元的旋转由 W 描述
- 变形由 D 描述
- 旋度是 W 的对偶矢量
- 简单剪切流既有 D 又有 W
- 势流只有 D 没有 W

$$\int_S (\nabla \times \mathbf{v}) \cdot \mathbf{n} \, dS = \oint_C \mathbf{v} \cdot d\mathbf{r}$$

定理含义

- 曲面上旋度的通量 = 边界环量
- 内部旋转的总效果由边界环流体现
- 将面积分转化为线积分（或反之）
- 是环量守恒定理的基础
- C 为 S 的边界，右手定则定向

流体力学应用

- 开尔文环量定理：无旋流动环量守恒
- 升力的库塔-儒可夫斯基定理
- 涡量通量 = 绕边界的速度环量
- 机翼升力与环量直接相关
- 是空气动力学的基础定理之一

工程例题：刚体旋转与简单剪切的旋度

4.4 旋度

情形一：刚体旋转

$$\mathbf{v} = (-\omega y, \omega x, 0)$$

$$\mathbf{L} = \begin{bmatrix} 0 & -\omega \\ \omega & 0 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{D} = (\mathbf{L} + \mathbf{L}^T)/2 = 0$$

$$\mathbf{W} = (\mathbf{L} - \mathbf{L}^T)/2 = \begin{bmatrix} 0 & -\omega \\ \omega & 0 \end{bmatrix}$$

$$\nabla \times \mathbf{v} = (0, 0, 2\omega) \rightarrow \text{有旋}$$

情形二：简单剪切

$$\mathbf{v} = (\gamma y, 0, 0)$$

$$\mathbf{L} = \begin{bmatrix} 0 & \gamma \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{D} = \begin{bmatrix} 0 & \gamma/2 \\ \gamma/2 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{W} = \begin{bmatrix} 0 & \gamma/2 \\ -\gamma/2 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\nabla \times \mathbf{v} = (0, 0, -\gamma) \rightarrow \text{有旋}$$

对比结论

- 刚体旋转：只有旋转 ($\mathbf{W} \neq 0, \mathbf{D} = 0$)，微元像刚体一样转动
- 简单剪切：既有变形又有旋转 ($\mathbf{D} \neq 0, \mathbf{W} \neq 0$)，微元同时变形和转动
- 两者都是有旋流动，但旋转的来源不同

概念辨析：有旋与无旋流动

特征	无旋流动（有势）	有旋流动
旋度	$\nabla \times \mathbf{v} = 0$	$\nabla \times \mathbf{v} \neq 0$
速度势	存在 ϕ , $\mathbf{v} = \nabla \phi$	不存在单值速度势
涡量张量	$\mathbf{W} = 0, \mathbf{L} = \mathbf{D}$	$\mathbf{W} \neq 0$
典型例子	均匀流、源汇流、纯拉伸	刚体旋转、简单剪切、边界层

易错点：流线是圆周的流动不一定有旋（如自由涡 $v \propto 1/r$ ），流线是直线的流动不一定无旋（如简单剪切）。判断依据是微元是否旋转，不是轨迹形状。

用 SymPy 自动计算旋度，验证刚体旋转和简单剪切的涡量：

```
Import sympy as sp
x, y, z = sp.symbols('x y z')
omega, gamma = sp.symbols('omega gamma')
# 刚体旋转 v=(-ωy, ωx, 0)
v1 = [-omega*y, omega*x, 0]
curl1 = [sp.diff(v1[2],y)-sp.diff(v1[1],z),
sp.diff(v1[0],z)-sp.diff(v1[2],x),
sp.diff(v1[1],x)-sp.diff(v1[0],y)]
print("刚体旋转  $\nabla \times \mathbf{v}$  =", curl1)
# 输出: [0, 0, 2*omega]
# 简单剪切 v=(γy, 0, 0)
v2 = [gamma*y, 0, 0]
curl2 = [sp.diff(v2[2],y)-sp.diff(v2[1],z),
sp.diff(v2[0],z)-sp.diff(v2[2],x),
sp.diff(v2[1],x)-sp.diff(v2[0],y)]
print("简单剪切  $\nabla \times \mathbf{v}$  =", curl2)
# 输出: [0, 0, -gamma]
```

计算结果解读

- 刚体旋转： $\omega_z = 2\omega$
- 简单剪切： $\omega_z = -\gamma$
- 旋度方向沿 z 轴
- 符号由旋转方向决定

拓展：

计算自由涡 $\mathbf{v}=(-y/r^2, x/r^2, 0)$ 的旋度，验证除原点外无旋

课堂互动：旋度方向判断

4.4 旋度

问题：二维速度场 $\mathbf{v} = (y, -x, 0)$ ，其旋度方向沿哪个轴？符号是正还是负？

请用右手定则判断：

- A. 沿 $+z$ 方向（逆时针旋转）
- B. 沿 $-z$ 方向（顺时针旋转）
- C. 沿 $+x$ 方向
- D. 旋度为零（无旋流动）

答案见下一页 · 建议用右手定则比划 30 秒

答案：B. 沿 -z 方向（顺时针旋转）

计算过程

$$\mathbf{v} = (y, -x, 0)$$

$$(\nabla \times \mathbf{v})_z = \partial v_y / \partial x - \partial v_x / \partial y$$

$$= \partial (-x) / \partial x - \partial y / \partial y$$

$$= -1 - 1 = -2$$

$$\nabla \times \mathbf{v} = (0, 0, -2)$$

解析与常见错误

- 右手定则：四指顺时针，拇指指向 -z
- 角速度 $\Omega = (\nabla \times \mathbf{v})/2 = (0, 0, -1)$
- 常见错误：只算一项偏导
- 常见错误：混淆 v_x 和 v_y 的偏导顺序
- 评价目标：掌握旋度计算与方向判断

梯度、散度、旋度综合对照

算子	作用对象	结果类型	物理意义	积分定理
∇	标量场 ϕ	矢量	最陡上升方向	线积分定理
$\nabla \cdot$	矢量场 $\mathbf{v}$	标量	源汇强度	高斯散度定理
$\nabla \times$	矢量场 $\mathbf{v}$	矢量	旋转强度（涡量）	斯托克斯定理
∇^2	标量/矢量	同阶张量	扩散/曲率	格林公式

工程启示：梯度、散度、旋度不仅是数学工具，更是工程安全的"诊断指标"。
散度失控 → 质量不守恒；旋度异常 → 涡致振动；梯度陡峭 → 热应力集中。

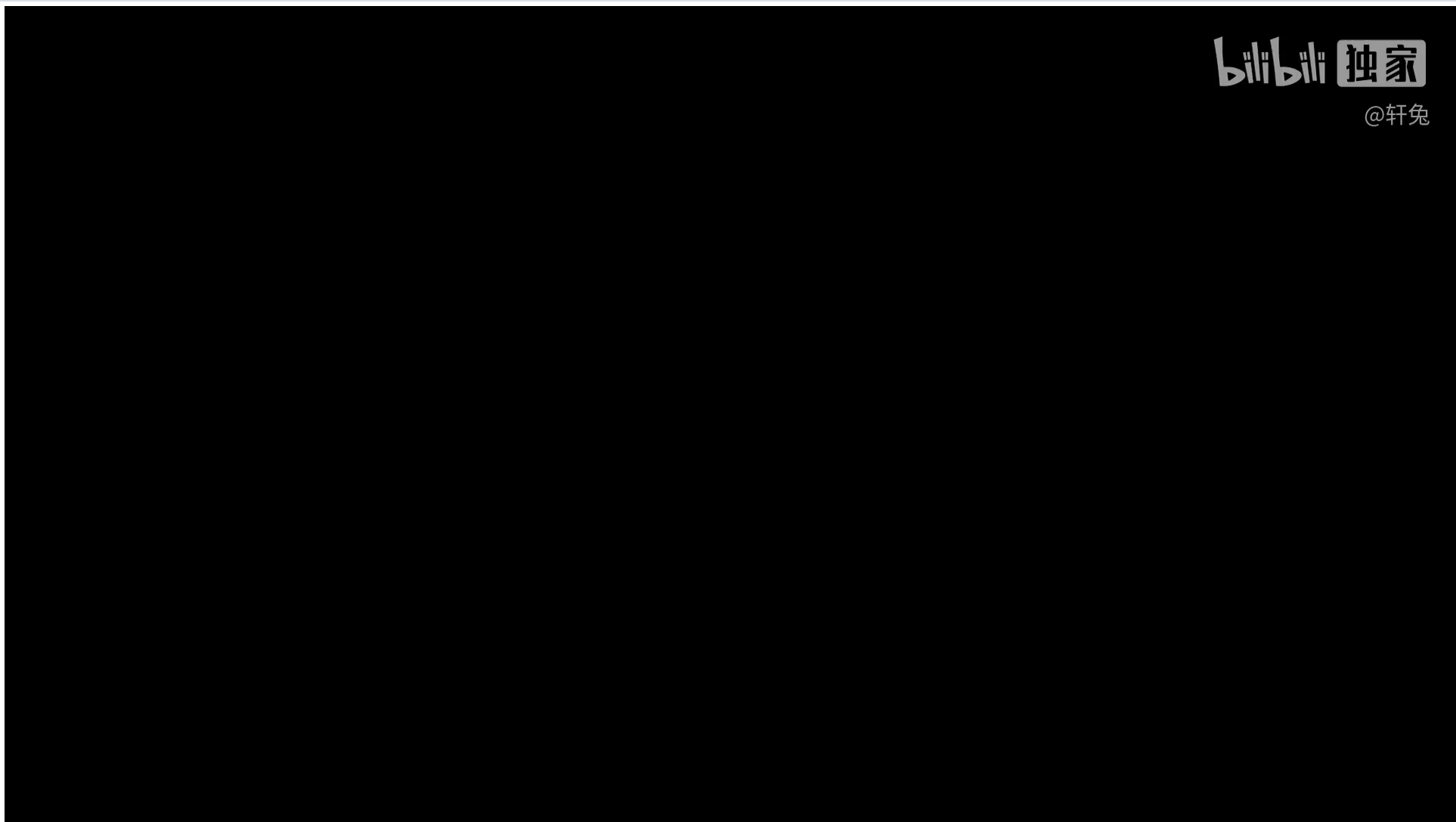
工程案例

- 航空发动机叶片：尾迹涡量导致高周疲劳
- 桥梁风致振动：卡门涡街引发共振
- 核反应堆冷却：温度梯度过大致热应力
- 国产大飞机C919：CFD精确计算涡量分布

工程师的责任

- 每一个偏导数都对应真实物理量
- 符号错误可能导致方向判断错误
- 近似假设必须明确适用边界
- 数值计算结果必须经过物理校验
- 严谨建模是工程安全的第一道防线

拓展视频：【nabla算子】与梯度、散度、旋度



视频地址：<https://www.bilibili.com/video/BV1a541127cX>

4.5

拉普拉斯与复合恒等式

$\nabla^2 = \nabla \cdot \nabla$ 扩散方程的核心算子

三大恒等式: $\nabla \times \nabla \phi = 0$ $\nabla \cdot (\nabla \times \mathbf{v}) = 0$ $\nabla \times (\nabla \times \mathbf{v}) = \nabla (\nabla \cdot \mathbf{v}) - \nabla^2 \mathbf{v}$

$$\nabla^2 \phi = \nabla \cdot (\nabla \phi) = \partial_i \partial_i \phi = \partial^2 \phi / \partial x^2 + \partial^2 \phi / \partial y^2 + \partial^2 \phi / \partial z^2$$

数学性质

- 标量算子，作用于标量得标量
- 也可作用于矢量： $(\nabla^2 v)_i = \partial_j \partial_j v_i$
- 线性算子： $\nabla^2(a\phi + b\psi) = a\nabla^2\phi + b\nabla^2\psi$
- $\nabla^2\phi = 0$ ：调和函数（拉普拉斯方程）
- 是二阶微分算子中最重要的一个

物理意义

- 度量函数值与邻域平均值的偏差
- $\nabla^2\phi > 0$ ：局部极小（源）
- $\nabla^2\phi < 0$ ：局部极大（汇）
- $\nabla^2\phi = 0$ ：局部等于邻域平均
- 扩散方程： $\partial \phi / \partial t = \alpha \nabla^2 \phi$
- 热传导、静电势、渗流均含 ∇^2

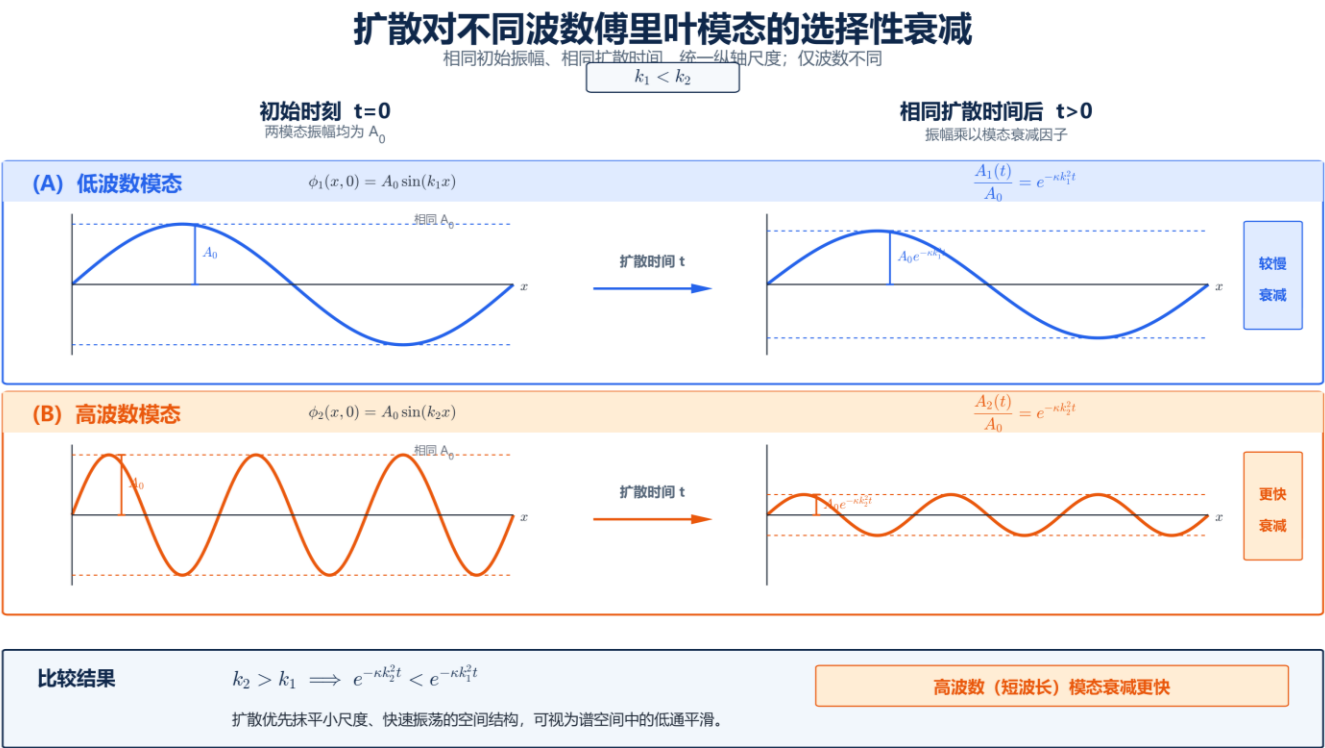


图4-8 不同波数傅里叶模态的衰减：高波数（小尺度）衰减更快

读图要点

- 扩散方程 $\partial u / \partial t = \alpha \nabla^2 u$
- 傅里叶模态 $u \sim e^{i(kx)}$
- $\nabla^2 u = -k^2 u$
- 衰减率 $\propto k^2$

物理结论

小尺度扰动（高k）快速衰减
大尺度结构（低k）缓慢衰减
扩散是"抹平"过程

$$\partial T / \partial t = \alpha \nabla^2 T \quad (\alpha = k / (\rho c_p) \text{ 为热扩散率})$$

稳态热传导

- $\partial T / \partial t = 0 \rightarrow \nabla^2 T = 0$
- 拉普拉斯方程：温度调和分布
- 边界条件决定唯一解
- 极值原理：极值在边界上
- 平均值性质： $T(x)$ =邻域平均

工程应用

- 航空发动机叶片冷却设计
- 电子器件散热分析
- 建筑保温与节能计算
- 核反应堆温度场模拟
- 焊接热影响区预测
- CFD中能量方程的核心项

复合恒等式一：梯度的旋度为零

4.5 恒等式

$$\nabla \times (\nabla \phi) = 0$$

指标证明

$$[\nabla \times (\nabla \phi)]_i = \varepsilon_{ijk} \partial_j (\partial_k \phi)$$

$$= \varepsilon_{ijk} \partial_j \partial_k \phi$$

ε_{ijk} 反对称, $\partial_j \partial_k$ 对称

反对称 $\times$ 对称 = 0

物理意义

- 梯度场一定无旋
- 有势场 $\Leftrightarrow$ 无旋场 (单连通域)
- 保守力 $F = -\nabla V$ 一定无旋
- 无旋流动存在速度势
- 静电场 $E = -\nabla \phi$ 无旋
- 逆定理: 无旋场可表为梯度

复合恒等式二：旋度的散度为零

4.5 恒等式

$$\nabla \cdot (\nabla \times \mathbf{v}) = 0$$

指标证明

$$\nabla \cdot (\nabla \times \mathbf{v}) = \partial_i (\epsilon_{ijk} \partial_j v_k)$$

$$= \epsilon_{ijk} \partial_i \partial_j v_k$$

ϵ_{ijk} 对*i,j*反对称

$\partial_i \partial_j$ 对*i,j*对称 $\rightarrow 0$

物理意义

- 旋度场一定是无源场（管形场）
- 涡量 $\omega = \nabla \times \mathbf{v}$ 满足 $\nabla \cdot \omega = 0$
- 涡线是闭合的，没有起点终点
- 磁场 $\mathbf{B}$ 满足 $\nabla \cdot \mathbf{B} = 0$ （无磁单极）
- 涡量通量在管内守恒
- 是涡动力学的基础方程

复合恒等式三：旋度的旋度

4.5 恒等式

$$\nabla \times (\nabla \times \mathbf{v}) = \nabla (\nabla \cdot \mathbf{v}) - \nabla^2 \mathbf{v}$$

指标证明 (ϵ - δ 恒等式)

$$\begin{aligned} [\nabla \times (\nabla \times \mathbf{v})]_i &= \epsilon_{ijk} \partial_j (\epsilon_{klm} \partial_l v_m) \\ &= (\delta_{il} \delta_{jm} - \delta_{im} \delta_{jl}) \partial_j \partial_l v_m \\ &= \partial_j \partial_l v_j - \partial_j \partial_j v_i \\ &= \partial_i (\partial_j v_j) - \nabla^2 v_i \\ &= [\nabla (\nabla \cdot \mathbf{v}) - \nabla^2 \mathbf{v}]_i \end{aligned}$$

物理意义与应用

- 不可压缩流动 ($\nabla \cdot \mathbf{v} = 0$) :
- $\nabla \times (\nabla \times \mathbf{v}) = -\nabla^2 \mathbf{v}$
- 涡量方程的核心变换
- Navier-Stokes方程的涡量形式
- 电磁学中 Maxwell 方程推导
- 是场论最重要的恒等式

编号	恒等式	名称/意义
1	$\nabla \times (\nabla \phi) = 0$	梯度无旋（有势场必无旋）
2	$\nabla \cdot (\nabla \times \mathbf{v}) = 0$	旋度无源（涡线闭合）
3	$\nabla \times (\nabla \times \mathbf{v}) = \nabla (\nabla \cdot \mathbf{v}) - \nabla^2 \mathbf{v}$	旋度的旋度（最重要）
4	$\nabla (\phi \psi) = \phi \nabla \psi + \psi \nabla \phi$	乘积的梯度
5	$\nabla \cdot (\phi \mathbf{v}) = \phi \nabla \cdot \mathbf{v} + \mathbf{v} \cdot \nabla \phi$	乘积的散度
6	$\nabla^2 (\phi \psi) = \phi \nabla^2 \psi + 2 \nabla \phi \cdot \nabla \psi + \psi \nabla^2 \phi$	乘积的拉普拉斯

用 SymPy 验证拉普拉斯算子及调和函数：

```
from sympy import symbols, diff, simplify
x, y, z = symbols('x y z')

def laplacian(f):
    return diff(f,x,2)+diff(f,y,2)+diff(f,z,2)

# 例1: 1/r 是调和函数 (r≠0)
r = (x**2+y**2+z**2)**0.5
print(simplify(laplacian(1/r))) # 0

# 例2: 验证  $\nabla \times (\nabla \phi) = 0$ 
phi = x**2*y + y*z**2
grad = [diff(phi,x), diff(phi,y), diff(phi,z)]
curl = [diff(grad[2],y)-diff(grad[1],z),
        diff(grad[0],z)-diff(grad[2],x),
        diff(grad[1],x)-diff(grad[0],y)]
print(curl) # [0, 0, 0]
```

计算结果解读

- $1/r$ 在 $r \neq 0$ 处满足 $\nabla^2(1/r)=0$
- 是三维拉普拉斯方程的基本解
- 对应点源的静电势/引力势
- 梯度的旋度恒为零，验证通过
- SymPy 可自动化简复杂表达式
- 建议学生：验证 $\nabla \cdot (\nabla \times v)=0$

一维扩散方程 $\partial u / \partial t = \alpha \partial^2 u / \partial x^2$ 的有限差分解：

```
import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt

N, alpha, dt, dx = 100, 0.01, 0.001, 0.01
x = np.linspace(0,1,N)
u = np.sin(np.pi*x) # 初始条件
r = alpha*dt/dx**2

for n in range(500): # 时间推进
    u[1:-1] = u[1:-1] + r*(
        u[2:]-2*u[1:-1]+u[:-2])
    u[0]=u[-1]=0 # 边界条件

# 解析解: u = sin(pi*x)*exp(-alpha*pi^2*t)
u_exact = np.sin(np.pi*x)*np.exp(
    -alpha*np.pi**2*500*dt)
print('max error:', np.max(np.abs(u-u_exact)))
```

数值结果解读

- FTCS格式：显式时间推进
- 稳定性条件： $r = \alpha \Delta t / \Delta x^2 \leq 0.5$
- 高波数模态衰减更快
- 数值解与解析解吻合良好
- 拉普拉斯算子离散为二阶中心差分
- 是CFD中扩散项的基础算法

用 SymPy 自动验证三大复合恒等式：

```
from sympy import symbols, diff, simplify
x,y,z = symbols('x y z')
phi = x**3*y + y**2*z # 任意标量场
v = [x*y, y*z, z*x] # 任意矢量场

def grad(f): return [diff(f,x),diff(f,y),diff(f,z)]
def div(f): return diff(f[0],x)+diff(f[1],y)+diff(f[2],z)
def curl(f): return [diff(f[2],y)-diff(f[1],z),
diff(f[0],z)-diff(f[2],x),diff(f[1],x)-diff(f[0],y)]

# 恒等式1: curl(grad(phi)) = 0
print(simplify(curl(grad(phi)))) # [0,0,0]
# 恒等式2: div(curl(v)) = 0
print(simplify(div(curl(v)))) # 0
# 恒等式3: curl(curl(v))=grad(div(v))-lap(v)
lhs = curl(curl(v))
rhs = grad(div(v))
print(simplify(lhs[0]-rhs[0])) # 验证分量
```

教学价值

- 任意场都满足恒等式
- 计算机验证 = 归纳性证明
- 减少手算错误
- 可推广到张量场
- 是科研中公式检查的常用方法
- 建议学生：验证乘积法则

下列哪些表达式恒等于零？（多选）

A. $\nabla \times (\nabla \phi)$

B. $\nabla \cdot (\nabla \times \mathbf{v})$

C. $\nabla \cdot (\nabla \phi)$

D. $\nabla \times (\nabla \times \mathbf{v})$

E. $\nabla(\nabla \cdot \mathbf{v}) - \nabla \times (\nabla \times \mathbf{v}) - \nabla^2 \mathbf{v}$

思考1分钟，同桌讨论。答案见下一页。

互动答案：恒等式判断

4.5 恒等式

正确答案：A、B、E

- A. $\nabla \times (\nabla \phi) = 0$ 梯度无旋， ϵ 反对称 $\times$ ∂ ∂ 对称=0
- B. $\nabla \cdot (\nabla \times \mathbf{v}) = 0$ 旋度无源，同理
- C. $\nabla \cdot (\nabla \phi) = \nabla^2 \phi \neq 0$ 这是拉普拉斯算子，一般不为零
- D. $\nabla \times (\nabla \times \mathbf{v}) = \nabla (\nabla \cdot \mathbf{v}) - \nabla^2 \mathbf{v} \neq 0$ 一般不为零
- E. $\nabla (\nabla \cdot \mathbf{v}) - \nabla \times (\nabla \times \mathbf{v}) - \nabla^2 \mathbf{v} = 0$ 由恒等式3直接变形

关键：记住三大恒等式，C是拉普拉斯不是恒等零。

形成性评价（二）：综合应用

评价

已知速度场 $\mathbf{v} = (ay, 0, 0)$ ， a 为常数。求：(1) $\nabla \cdot \mathbf{v}$ (2) $\nabla \times \mathbf{v}$ (3) 判断是否不可压缩、无旋

解题步骤

$$(1) \nabla \cdot \mathbf{v} = \partial (ay) / \partial x + 0 + 0 = 0$$

$$(2) \nabla \times \mathbf{v} = (0, 0, \partial 0 / \partial x - \partial (ay) / \partial y)$$

$$= (0, 0, -a)$$

$$(3) \nabla \cdot \mathbf{v} = 0 \rightarrow \text{不可压缩}$$

$$\nabla \times \mathbf{v} \neq 0 \rightarrow \text{有旋}$$

评价要点

- 能否正确计算散度和旋度
- 能否建立数学—物理联系
- 常见错误：旋度方向搞反
- 常见错误：混淆有旋/无旋判据
- 对应教学目标：掌握散度旋度
- 建议：让学生板演

形成性评价（三）：工程情境分析

评价

航空发动机燃烧室中，温度场 $T(x,y,z)$ 存在陡峭梯度。请用本章知识分析：

(1) 热流方向与温度梯度的关系 (2) 热扩散方程中 $\nabla^2 T$ 的作用

参考分析

- $q = -k \nabla T$ （傅里叶定律）
- 热流与梯度反向，从高温到低温
- $\nabla^2 T > 0$ ：局部被加热
- $\nabla^2 T < 0$ ：局部被冷却
- 陡峭梯度 $\rightarrow$ 大热流 $\rightarrow$ 热应力
- 叶片冷却设计需精确计算 $\nabla^2 T$

评价目的

- 检查数学—物理—工程关联
- 梯度：方向与大小
- 拉普拉斯：源汇判断
- 能否用张量语言描述工程
- 常见错误：热流方向搞反
- 建议：小组讨论3分钟

本章总结

张量场的微分运算

核心概念 · 关键公式 · 物理图像 · 能力目标 · 易错点

核心概念回顾

概念	定义	物理意义
梯度 $\nabla \phi$	标量场变化率最大的方向	热流 $q=-k\nabla T$ ，保守力 $F=-\nabla U$
散度 $\nabla \cdot \mathbf{v}$	单位体积净流出通量	源(+)汇(-)，不可压缩 $\nabla \cdot \mathbf{v}=0$
旋度 $\nabla \times \mathbf{v}$	局部旋转强度的2倍	涡量 $\omega=\nabla \times \mathbf{v}$ ，有旋/无旋
拉普拉斯 ∇^2	$\nabla \cdot \nabla$ ，二阶微分算子	扩散/热传导方程核心
物质导数 D/Dt	$\partial/\partial t + \mathbf{v} \cdot \nabla$	跟随质点的变化率
速度梯度 L	$L_{ij}=\partial_j v_i = D+W$	变形率D+旋转率W

关键公式回顾

微分算子定义

$$\nabla \phi = (\partial \phi / \partial x, \partial \phi / \partial y, \partial \phi / \partial z)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{v} = \partial v_x / \partial x + \partial v_y / \partial y + \partial v_z / \partial z$$

$$\nabla \times \mathbf{v} = (\partial v_z / \partial y - \partial v_y / \partial z, \dots)$$

$$\nabla^2 \phi = \partial^2 \phi / \partial x^2 + \partial^2 \phi / \partial y^2 + \partial^2 \phi / \partial z^2$$

$$D/Dt = \partial / \partial t + \mathbf{v} \cdot \nabla$$

积分定理

$$\text{高斯定理: } \int_V \nabla \cdot \mathbf{v} dV = \oint_S \mathbf{v} \cdot \mathbf{n} dS$$

$$\text{斯托克斯: } \int_S (\nabla \times \mathbf{v}) \cdot \mathbf{n} dS = \oint_C \mathbf{v} \cdot d\mathbf{r}$$

三大复合恒等式

$$\nabla \times (\nabla \phi) = 0 \quad \text{梯度无旋}$$

$$\nabla \cdot (\nabla \times \mathbf{v}) = 0 \quad \text{旋度无源}$$

$$\nabla \times (\nabla \times \mathbf{v}) = \nabla (\nabla \cdot \mathbf{v}) - \nabla^2 \mathbf{v} \quad (\text{最重要})$$

物理图像回顾

梯度：最陡上升方向

- 等温线/等势线的法向
- 热流与梯度反向
- 保守力 = -势能梯度

散度：源与汇

- 微元面积/体积变化率
- 正=源，负=汇
- 不可压缩=散度为零

旋度：局部旋转

- 角速度的2倍
- 圆周流有旋，纯拉伸无旋
- 简单剪切流也有旋

拉普拉斯：平滑度

- 与邻域平均值的偏差
- 扩散方程的核心
- 高波数模态快速衰减

能力目标回顾

学完本章，你应该能够：

1. 正确计算标量场的梯度、矢量场的散度和旋度
2. 用指标记号证明矢量微分恒等式
3. 解释每个微分算子的物理意义和几何图像
4. 判断流动的可压缩性和有旋/无旋性
5. 应用高斯定理和斯托克斯定理转换积分
6. 用 Python/SymPy 进行符号计算和数值验证
7. 将张量分析工具应用于连续介质力学问题

易错点回顾

#	常见错误	正确理解
1	圆周运动一定有旋	$v \propto 1/r$ 的自由涡旋度为零（无旋）
2	直线流动一定无旋	简单剪切流 $v=(ay,0,0)$ 旋度不为零
3	$\nabla \cdot v=0$ 意味着速度为零	只表示体积不变，速度可以很大
4	∇ 是普通矢量可随意交换	∇ 是微分算子，作用顺序不可交换
5	物质导数=局部导数	$D/Dt = \partial / \partial t + v \cdot \nabla$ ，多了对流项
6	$L_{ij} = \partial_i v_j$	教材约定 $L_{ij} = \partial_j v_i$ ，注意指标顺序

课后任务与下章衔接

课后任务

- 教材习题 4.1–4.10（梯度散度旋度计算）
- 用指标记号证明三大复合恒等式
- 用 SymPy 验证习题中的计算结果
- 编程实现一维扩散方程的数值解
- 阅读教材 4.6 节拓展内容

下章衔接

第5章：积分变换与守恒定律

- 高斯定理→质量守恒方程
- 斯托克斯定理→环量与涡量
- 雷诺输运定理
- 连续介质力学的控制方程

本章主线：张量场的微分运算 = 连续介质力学的语言

梯度描述变化方向，散度描述源汇，旋度描述旋转，拉普拉斯描述扩散。

下一章将用这些工具推导守恒定律，进入连续介质力学的核心。